cÂg অধ্যায়

বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ

আমরা দৈনন্দিন জীবনে একটি m¤úY জিনিসের সাথে এর অংশও ব্যবহার করি। এই বিভিন্ন অংশ এক-একটি ভগ্নাংশ। সপ্তম শ্রেণিতে আমরা বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ কী তা জেনেছি এবং ভগ্নাংশের লঘুকরণ ও সাধারণ হরবিশিষ্টকরণ শিখেছি। ভগ্নাংশের যোগ, বিয়োগ ও সরলীকরণ m¤ú‡K we¯Íwi Z fv‡e জেনেছি। এ অধ্যায়ে ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ m¤ú‡K পুনরালোচনা এবং ভগ্নাংশের গুণ, ভাগ ও সরলীকরণ m¤ú‡K বিশদ আলোচনা করা হয়েছে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ করতে পারবে এবং এতদসংক্রান্ত সরল ও সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

৫.১ বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ

যদি m ও n দুইটি বীজগণিতীয় রাশি হয়, তবে $\frac{m}{n}$ একটি বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ, যেখানে $n \neq 0$। এখানে $\frac{m}{n}$ ভগ্নাংশটির m কে লব ও n কে হর বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ, $\frac{a}{b}, \frac{x+y}{y}, \frac{x^2+a^2}{x+a}$ ইত্যাদি বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ।

৫.২ ভগ্নাংশের লঘিষ্ঠকরণ

কোনো বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের লব ও হরের সাধারণ গুণনীয়ক থাকলে, ভগ্নাংশটির লব ও হরের গ.সা.গু. দিয়ে লব ও হরকে ভাগ করলে, লব ও হরের ভাগফল দ্বারা গঠিত bZb ভগ্নাংশটিই হবে প্রদত্ত ভগ্নাংশটির লঘিষ্ঠকরণ।

যেমন, $\frac{a^3b^2 - a^2b^3}{a^3b - ab^3} = \frac{a^2b^2(a-b)}{ab(a^2-b^2)}$

$$= \frac{a^2b^2(a-b)}{ab(a+b)(a-b)}$$

$$= \frac{ab}{a+b}$$

এখানে লব ও হরের গ.সা.গু. $ab\,(a+b)$ দ্বারা লব ও হরকে ভাগ করে লঘিষ্ঠকরণ করা হয়েছে।

৫.৩ ভগ্নাংশকে সাধারণ হরবিশিষ্টকরণ

দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশকে সাধারণ হরবিশিষ্ট করতে নিচের ধাপগুলো অনুসরণ করতে হবে :

১। হরগুলোর ল.সা.গু. নির্ণয় করতে হবে।

২। ভগ্নাংশের হর দিয়ে ল.সা.গু.কে ভাগ করতে হবে।

৩। হর দিয়ে ল.সা.গু.কে ভাগ করা হলে যে ভাগফল পাওয়া যাবে, সেই ভাগফল দ্বারা ঐ ভগ্নাংশের লব ও হরকে গুণ করতে হবে।

যেমন, $\frac{x}{y}, \frac{a}{b}, \frac{m}{n}$ তিনটি ভগ্নাংশ, এদের একই হরবিশিষ্ট করতে হবে।

এখানে তিনটি ভগ্নাংশের হর যথাক্রমে y, b ও n এদের ল.সা.গু. $= ybn$

১ম ভগ্নাংশ $\frac{x}{y}$ এর হর y, y দ্বারা ল.সা.গু. ybn কে ভাগ করলে ভাগফল bn, এখন bn দ্বারা $\frac{x}{y}$ ভগ্নাংশের লব ও হরকে গুণ করতে হবে।

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{x \times bn}{y \times bn} = \frac{xbn}{ybn}$$

একইভাবে, ২য় ভগ্নাংশ $\frac{a}{b}$ এর হর b, b দ্বারা ল.সা.গু. ybn কে ভাগ করলে ভাগফল yn।

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{a \times yn}{b \times yn} = \frac{ayn}{ybn}.$$

৩য় ভগ্নাংশ $\frac{m}{n}$ এর হর n, n দ্বারা ল.সা.গু. ybn কে ভাগ করলে ভাগফল yb।

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{m \times yb}{n \times yb} = \frac{myb}{ybn}.$$

অতএব, $\frac{x}{y}, \frac{a}{b}$ ও $\frac{m}{n}$ এর সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশ যথাক্রমে $\frac{xbn}{ybn}, \frac{ayn}{ybn}$ ও $\frac{myb}{ybn}$

উদাহরণ ১। নিচের ভগ্নাংশ দুইটিকে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর :

ক) $\frac{16a^2b^3c^4y}{8a^3b^2c^5x}$ (খ) $\frac{a(a^2+2ab+b^2)(a^3-b^3)}{(a^3+b^3)(a^4b-b^5)}$

সমাধান : (ক) প্রদত্ত ভগ্নাংশ $\frac{16a^2b^3c^4y}{8a^3b^2c^5x}$

এখানে, 16 ও 8 -এর গ.সা.গু. হলো 8

a^2 ও a^3 " " " a^2

b^3 ও b^2 " " " b^2

c^4 ও c^5 " " " c^4

y ও x " " " 1

$\therefore 16a^2b^3c^4y$ ও $8a^3b^2c^5x$ এর গ.সা.গু. হলো $8a^2b^2c^4$

$\frac{16a^2b^3c^4y}{8a^3b^2c^5x}$ এর লব ও হরকে $8a^2b^2c^4$ দ্বারা ভাগ করে পাওয়া যায় $\frac{2by}{acx}$

$\therefore \frac{16a^2b^3c^4y}{8a^3b^2c^5x}$ এর লঘিষ্ঠকরণ হলো $\frac{2by}{acx}$.

(খ) প্রদত্ত ভগ্নাংশটি $\frac{a(a^2+2ab+b^2)(a^3-b^3)}{(a^3+b^3)(a^4b-b^5)}$

এখানে, লব $= a(a^2+2ab+b^2)(a^3-b^3)$

$= a(a+b)^2(a-b)(a^2+ab+b^2)$

হর $= (a^3+b^3)(a^4b-b^5)$

$= (a+b)(a^2-ab+b^2)\{b(a^4-b^4)\}$

$= b(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

$= b(a+b)(a^2-ab+b^2)(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$

$= b(a+b)^2(a-b)(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)$

$\therefore$ লব ও হরের গ.সা.গু. $= (a+b)^2(a-b)$

প্রদত্ত ভগ্নাংশটির লব ও হরকে $(a+b)^2(a-b)$ দ্বারা ভাগ করে পাওয়া যায় $\frac{a(a^2+ab+b^2)}{b(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}$

$\therefore$ ভগ্নাংশটির লঘিষ্ঠ ic $\frac{a(a^2+ab+b^2)}{b(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}$

উদাহরণ ২। $\frac{x}{x^3y-xy^3}, \frac{a}{xy(a^2-b^2)}, \frac{m}{m^3n-mn^3}$ কে সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিণত কর।

সমাধান : এখানে প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলো $\frac{x}{x^3y-xy^3}, \frac{a}{xy(a^2-b^2)}, \frac{m}{m^3n-mn^3}$

এখানে, ১ম ভগ্নাংশের হর $= x^3y-xy^3$

$= xy(x^2-y^2)$

২য় ভগ্নাংশের হর $= xy(a^2-b^2)$

৩য় ভগ্নাংশের হর $= m^3n-mn^3$

$= mn(m^2-n^2)$

$\therefore$ হরগুলোর ল.সা.গু. $= xy(x^2-y^2)(a^2-b^2)(m^2-n^2)mn$

অতএব, $\frac{x}{x^3y-xy^3}=\frac{x(a^2-b^2)(m^2-n^2)mn}{xy(x^2-y^2)(a^2-b^2)(m^2-n^2)mn}$

$\frac{a}{xy(a^2-b^2)}=\frac{a(x^2-y^2)(m^2-n^2)mn}{xy(x^2-y^2)(a^2-b^2)(m^2-n^2)mn}$

এবং $\frac{m}{m^3n-mn^3}=\frac{xym(x^2-y^2)(a^2-b^2)}{xy(x^2-y^2)(a^2-b^2)(m^2-n^2)mn}$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশগুলো $\frac{x(a^2-b^2)(m^2-n^2)mn}{xy(x^2-y^2)(a^2-b^2)(m^2-n^2)mn}$, $\frac{a(x^2-y^2)(m^2-n^2)mn}{xy(x^2-y^2)(a^2-b^2)(m^2-n^2)mn}$ ও $\frac{xym(x^2-y^2)(a^2-b^2)}{xy(x^2-y^2)(a^2-b^2)(m^2-n^2)mn}$

কাজ : সমহরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে প্রকাশ কর :

১। $\frac{x^2+xy}{x^2y}$ এবং $\frac{x^2-xy}{xy^2}$ ২। $\frac{a-b}{a+2b}$ এবং $\frac{2a+b}{a^2-4b}$

৫.৪ ভগ্নাংশের যোগ

দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশের যোগ করতে হলে, ভগ্নাংশগুলো সাধারণ হরবিশিষ্ট করে লবগুলোকে যোগ করলে যোগফল হবে একটি নতুন ভগ্নাংশ, যার লব হবে সাধারণ হরবিশিষ্টকরণকৃত ভগ্নাংশগুলোর লবগুলোর যোগফল এবং হর হলো ভগ্নাংশগুলোর হরের ল.সা.গু.।

যেমন, $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{b}{z}$

$=\frac{ayz}{xyz}+\frac{bxz}{xyz}+\frac{bxy}{xyz}$

$=\frac{ayz+bxz+bxy}{xyz}$

উদাহরণ ৩। ভগ্নাংশ তিনটি যোগ কর : $\frac{1}{x-y},\frac{x}{x^2+xy+y^2},\frac{y^2}{x^3-y^3}$

এখানে, ১ম ভগ্নাংশ $=\frac{1}{x-y}$

২য় ভগ্নাংশ $=\frac{x}{x^2+xy+y^2}$

৩য় ভগ্নাংশ $=\frac{y^2}{x^3-y^3}=\frac{y^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}$

হরগুলোর ল.সা.গু. $=(x-y)(x^2+xy+y^2)=(x^3-y^3)$

সুতরাং, $\frac{1}{x-y}, \frac{x}{x^2+xy+y^2}, \frac{y^2}{x^3-y^3}$ এর যোগফল

$$= \frac{1}{x-y} + \frac{x}{x^2+xy+y^2} + \frac{y^2}{x^3-y^3}$$

$$= \frac{x^2+xy+y^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} + \frac{x(x-y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} + \frac{y^2}{x^3-y^3}$$

$$= \frac{x^2+xy+y^2}{x^3-y^3} + \frac{x^2-xy}{x^3-y^3} + \frac{y^2}{x^3-y^3}$$

$$= \frac{x^2+xy+y^2+x^2-xy+y^2}{x^3-y^3}$$

$$= \frac{2(x^2+y^2)}{x^3-y^3}$$

নির্ণেয় যোগফল $\frac{2(x^2+y^2)}{x^3-y^3}$.

উদাহরণ ৪ । যোগ কর : $\frac{3a}{a^2+3a-4} + \frac{2a}{a^2-1} + \frac{a}{a^2+5a+4}$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $\frac{3a}{a^2+3a-4} + \frac{2a}{a^2-1} + \frac{a}{a^2+5a+4}$

$$= \frac{3a}{a^2+4a-a-4} + \frac{2a}{(a+1)(a-1)} + \frac{a}{a^2+a+4a+4}$$

$$= \frac{3a}{(a+4)(a-1)} + \frac{2a}{(a+1)(a-1)} + \frac{a}{(a+1)(a+4)}$$

$$= \frac{3a(a+1)+2a(a+4)+a(a-1)}{(a+4)(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{3a^2+3a+2a^2+8a+a^2-a}{(a+4)(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{6a^2+10a}{(a+4)(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{2a(3a+5)}{(a+4)(a^2+1)}$$

উদাহরণ ৫ । যোগফল নির্ণয় কর :

(ক) $\frac{a-b}{bc}+\frac{b-c}{ca}+\frac{c-a}{ab}$

(খ) $\frac{1}{a^2-5a+6}+\frac{1}{a^2-9}+\frac{1}{a^2+4a+3}$

(গ) $\frac{1}{a-2}+\frac{a+2}{a^2+2a+4}$

সমাধান : (ক) $\frac{a-b}{bc}+\frac{b-c}{ca}+\frac{c-a}{ab}$

$$=\frac{a^2-ab+b^2-bc+c^2-ca}{abc}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{abc}$$

(খ) $\frac{1}{a^2-5a+6}+\frac{1}{a^2-9}+\frac{1}{a^2+4a+3}$

$$=\frac{1}{a^2-2a-3a+6}+\frac{1}{(a+3)(a-3)}+\frac{1}{a^2+3a+a+3}$$

$$=\frac{1}{a(a-2)-3(a-2)}+\frac{1}{(a+3)(a-3)}+\frac{1}{a(a+3)+1(a+3)}$$

$$=\frac{1}{(a-2)(a-3)}+\frac{1}{(a+3)(a-3)}+\frac{1}{(a+3)(a+1)}$$

$$=\frac{(a+1)(a+3)+(a+1)(a-2)+(a-2)(a-3)}{(a+1)(a-2)(a+3)(a-3)}$$

$$=\frac{a^2+4a+3+a^2-a-2+a^2-5a+6}{(a+1)(a-2)(a+3)(a-3)}$$

$$=\frac{3a^2-2a+7}{(a+1)(a-2)(a^2-9)}$$

(গ) $\frac{1}{a-2}+\frac{a+2}{a^2+2a+4}$

$$=\frac{a^2+2a+4+(a-2)(a+2)}{(a-2)(a^2+2a+4)}$$

$$= \frac{a^2 + 2a + 4 + a^2 - 4}{(a^3 - 8)}$$

$$= \frac{2a^2 + 2a}{(a^3 - 8)}$$

$$= \frac{2a(a+1)}{(a^3 - 8)}$$

কাজ : যোগ কর :

১। $\frac{2a}{3x^2y}, \frac{3b}{2xy^2}, \frac{a+b}{xy}$ ২। $\frac{2}{x^2y - xy^2}, \frac{3}{xy(x^2 - y^2)}, \frac{1}{x^2 - y^2}$

৫.৫ ভগ্নাংশের বিয়োগ

দুইটি ভগ্নাংশের বিয়োগ করতে হলে, ভগ্নাংশ দুইটিকে সাধারণ হরবিশিষ্ট করে লব দুইটিকে বিয়োগ করলে বিয়োগফল হবে একটি bZb ভগ্নাংশ, যার লব হবে সাধারণ হরবিশিষ্টকরণকৃত ভগ্নাংশ দুইটির লবের বিয়োগফল এবং হর হবে ভগ্নাংশ দুইটির হরের ল.সা.গু.।

যেমন, $\frac{a}{xy} - \frac{b}{yz}$

$$= \frac{az}{xyz} - \frac{bx}{xyz}$$

$$= \frac{az - bx}{xyz}$$

উদাহরণ ৬। বিয়োগফল নির্ণয় কর :

(ক) $\frac{x}{4a^2bc^2} - \frac{y}{9ab^2c^3}$

(খ) $\frac{x}{(x-y)^2} - \frac{x+y}{x^2 - y^2}$

(গ) $\frac{a^2 + 9y^2}{a^2 - 9y^2} - \frac{a - 3y}{a + 3y}$

সমাধান : (ক) $\frac{x}{4a^2bc^2} - \frac{y}{9ab^2c^3}$

এখানে, হর $4a^2bc^2$ ও $9ab^2c^3$ এর ল.সা.গু. $36a^2b^2c^3$

$\therefore \frac{x}{4a^2bc^2} - \frac{y}{9ab^2c^3}$

$$= \frac{9xbc - 4ya}{36a^2b^2c^3}$$

(খ) $\frac{x}{(x-y)^2}-\frac{x+y}{x^2-y^2}$

এখানে হর $(x-y)^2$ ও x^2-y^2 এর ল.সা.গু. $(x-y)^2(x+y)$

$\therefore \quad \frac{x}{(x-y)^2}-\frac{x+y}{x^2-y^2}$

$=\frac{x(x+y)-(x+y)(x-y)}{(x-y)^2(x+y)}$

$=\frac{x^2+xy-x^2+y^2}{(x-y)^2(x+y)}$

$=\frac{xy+y^2}{(x-y)^2(x+y)}$

$=\frac{y(x+y)}{(x-y)^2(x+y)}$

$=\frac{y}{(x-y)^2}$

(গ) $\frac{a^2+9y^2}{a^2-9y^2}-\frac{a-3by}{a+3y}$

এখানে হর a^2-9y^2 ও $a+3y$ এর ল.সা.গু. a^2-9y^2

$\frac{a^2+9y^2}{a^2-9y^2}-\frac{a-3y}{a+3y}$

$=\frac{a^2+9y^2-(a-3y)(a-3y)}{a^2-9y^2}$

$=\frac{a^2+9y^2-(a^2-6ay+9y^2)}{a^2-9y^2}$

$=\frac{a^2+9y^2-a^2+6ay-9y^2}{a^2-9y^2}$

$=\frac{6ay}{a^2-9y^2}$

কাজ : বিয়োগ কর :

১। $\frac{x}{x^2+xy+y^2}$ থেকে $\frac{xy}{x^3-y^3}$ ২। $\frac{1}{1+a+a^2}$ থেকে $\frac{2a}{1+a^2+a^4}$

লক্ষণীয় : বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ করার সময় প্রয়োজন হলে প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলোকে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করে নিতে হবে।

যেমন, $\frac{a^2bc}{ab^2c}+\frac{ab^2c}{abc^2}+\frac{abc^2}{a^2bc}$

$$=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$
$$=\frac{a\times ca}{b\times ca}+\frac{b\times ab}{c\times ab}+\frac{c\times bc}{a\times bc} \quad [\text{হর } b,c,a \text{ এর ল.সা.গু. } abc]$$
$$=\frac{ca^2}{abc}+\frac{ab^2}{abc}+\frac{bc^2}{abc}$$
$$=\frac{ca^2+ab^2+bc^2}{abc}.$$

উদাহরণ ৭। সরল কর :

(ক) $\frac{x-y}{(y+z)(z+x)}+\frac{y-z}{(x+y)(z+x)}+\frac{z-x}{(x+y)(y+z)}$

(খ) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}-\frac{4}{x^2+4}$

(গ) $\frac{1}{1-a+a^2}-\frac{1}{1+a+a^2}-\frac{2a}{1+a^2+a^4}$

সমাধান : (ক) $\frac{x-y}{(y+z)(z+x)}+\frac{y-z}{(x+y)(z+x)}+\frac{z-x}{(x+y)(y+z)}$

এখানে, $(y+z)(z+x),(x+y)(z+x)$ ও $(x+y)(y+z)$ এর ল.সা.গু. $(x+y)(y+z)(z+x)$

$$\therefore \frac{x-y}{(y+z)(z+x)}+\frac{y-z}{(x+y)(z+x)}+\frac{z-x}{(x+y)(y+z)}$$
$$=\frac{(x-y)(x+y)+(y-z)(y+z)+(z-x)(z+x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$
$$=\frac{x^2-y^2+y^2-z^2+z^2-x^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$
$$=\frac{0}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$
$$=0.$$

(খ) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}-\frac{4}{x^2+4}$

$=\frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}-\frac{4}{x^2+4}$

$=\frac{4}{x^2-4}-\frac{4}{x^2+4}$

$=4\left[\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x^2+4}\right]$

$=4\left[\frac{x^2+4-x^2+4}{(x^2-4)(x^2+4)}\right]$

$=\frac{4\times 8}{(x^2-4)(x^2+4)}$

$=\frac{32}{x^4-16}$

(গ) $\frac{1}{1-a+a^2}-\frac{1}{1+a+a^2}-\frac{2a}{1+a^2+a^4}$

এখানে, $1+a^2+a^4=1+2a^2+a^4-a^2$

$=(1+a^2)^2-a^2$

$=(1+a^2+a)(1+a^2-a)$

হর $1-a+a^2, 1+a+a^2, 1+a^2+a^4$ এর ল.সা.গু. $=(1+a+a^2)(1-a+a^2)$

$=1+a^2+a^4$

$\therefore \frac{1}{1-a+a^2}-\frac{1}{1+a+a^2}-\frac{2a}{1+a^2+a^4}$

$=\frac{1+a+a^2-1+a-a^2-2a}{1+a^2+a^4}$

$=\frac{0}{1+a^2+a^4}$

$=0$

অনুশীলনী ৫.১

১। লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর:

(ক) $\frac{4x^2y^3z^5}{9x^5y^2z^3}$ (খ) $\frac{16(2x)^4(3y)^5}{(3x)^3.(2y)^6}$

(গ) $\frac{x^3y+xy^3}{x^2y^3+x^3y^2}$ (ঘ) $\frac{(a-b)(a+b)}{a^3-b^3}$

(ঙ) $\frac{x^2-6x+5}{x^2-25}$ (চ) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-9x+20}$

(ছ) $\frac{(x^3-y^3)(x^2-xy+y^2)}{(x^2-y^2)(x^3+y^3)}$ (জ) $\frac{a^2-b^2-2bc-c^2}{a^2+2ab+b^2-c^2}$

২। সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে প্রকাশ কর :

(ক) $\frac{x^2}{xy},\frac{y^2}{yz},\frac{z^2}{zx}$ (খ) $\frac{x-y}{xy},\frac{y-z}{yz},\frac{z-x}{zx}$

(গ) $\frac{x}{x-y},\frac{y}{x+y},\frac{z}{x(x+y)}$ (ঘ) $\frac{x+y}{(x-y)^2},\frac{x-y}{x^3+y^3},\frac{y-z}{x^2-y^2}$

(ঙ) $\frac{a}{a^3+b^3},\frac{b}{(a^2+ab+b^2)},\frac{c}{a^3-b^3}$

(চ) $\frac{1}{x^2-5x+6},\frac{1}{x^2-7x+12},\frac{1}{x^2-9x+20}$

(ছ) $\frac{a-b}{a^2b^2},\frac{b-c}{b^2c^2},\frac{c-a}{c^2a^2}$ (জ) $\frac{x-y}{x+y},\frac{y-z}{y+z},\frac{z-x}{z+x}$

৩। যোগ কর :

(ক) $\frac{a-b}{a}+\frac{a+b}{b}$ (খ) $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}$

(গ) $\frac{x-y}{x}+\frac{y-z}{y}+\frac{z-x}{z}$ (ঘ) $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}$

(ঙ) $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-4x+3}+\frac{1}{x^2-5x+4}$

(চ) $\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{a^2-ab+b^2}$

(ছ) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x^2-4}$ (জ) $\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^4-1}+\frac{4}{x^8-1}$

৪। বিয়োগ কর :

(ক) $\frac{a}{x-3}-\frac{a^2}{x^2-9}$ (খ) $\frac{1}{y(x-y)}-\frac{1}{x(x+y)}$

(গ) $\frac{x+1}{1+x+x^2}-\frac{x-1}{1-x+x^2}$ (ঘ) $\frac{a^2+16b^2}{a^2-16b^2}-\frac{a-4b}{a+4b}$

(ঙ) $\frac{1}{x-y}-\frac{x^2-xy+y^2}{x^3+y^3}$

৫। সরল কর :

(ক) $\frac{x-y}{xy}+\frac{y-z}{yz}+\frac{z-x}{zx}$

(খ) $\frac{x-y}{(x+y)(y+z)}+\frac{y-z}{(y+z)(z+x)}+\frac{z-x}{(z+x)(x+y)}$

(গ) $\frac{y}{(x-y)(y-z)}+\frac{x}{(z-x)(x-y)}+\frac{z}{(y-z)(x-z)}$

(ঘ) $\frac{1}{x+3y}+\frac{1}{x-3y}-\frac{2x}{x^2-9y^2}$ (ঙ) $\frac{1}{x-y}-\frac{2}{2x+y}+\frac{1}{x+y}-\frac{2}{2x-y}$

(চ) $\frac{1}{x-2}-\frac{x-2}{x^2+2x+4}+\frac{6x}{x^3+8}$ (ছ) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}$

(জ) $\frac{x-y}{(y-z)(z-x)}+\frac{y-z}{(z-x)(x-y)}+\frac{z-x}{(x-y)(x-z)}$

(ঝ) $\frac{1}{a-b-c}+\frac{1}{a-b+c}+\frac{a}{a^2+b^2-c^2-2ab}$

(ঞ) $\frac{1}{a^2+b^2-c^2+2ab}+\frac{1}{b^2+c^2-a^2+2bc}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2+2ca}$

৫.৬ ভগ্নাংশের গুণ

দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশ গুণ করেও একটি ভগ্নাংশ পাওয়া যায়। যার লব হলো দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশের লবগুলোর গুণফলের সমান এবং হর হলো হরগুলোর গুণফলের সমান। এরূপ ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করা হলে লব ও হর পরিবর্তিত হয়।

যেমন, $\frac{x}{y}$ ও $\frac{a}{b}$ দুইটি ভগ্নাংশ।

এই দুইটি ভগ্নাংশের গুণফল হলো

$$\frac{x}{y} \times \frac{a}{b}$$
$$= \frac{x \times a}{y \times b}$$
$$= \frac{xa}{yb}$$

এখানে xa হলো ভগ্নাংশটির লব যা প্রদত্ত ভগ্নাংশ দুইটির লবের গুণফল এবং হর হলো yb যা প্রদত্ত ভগ্নাংশ দুইটির হরের গুণফল।

আবার, $\frac{x}{by}, \frac{ya}{z}$ ও $\frac{z}{x}$ তিনটি ভগ্নাংশের গুণফল হলো

$$\frac{x}{by} \times \frac{ya}{z} \times \frac{z}{x}$$
$$= \frac{xyza}{xyzb}$$
$$= \frac{a}{b} \qquad \text{[লঘিষ্ঠকরণ করে]}$$

এখানে গুণফল লঘিষ্ঠকরণ করার ফলে লব ও হর পরিবর্তিত হলো।

উদাহরণ ৮। গুণ কর :

(ক) $\frac{a^2b^2}{cd}$ কে $\frac{ab}{c^2d^2}$ দ্বারা

(খ) $\frac{x^2y^3}{xy^2}$ কে $\frac{x^3b}{ay^3}$ দ্বারা

(গ) $\frac{10x^5b^4z^3}{3x^2b^2z}$ কে $\frac{15y^5b^2z^2}{2y^2a^2x}$ দ্বারা

(ঘ) $\frac{x^2-y^2}{x^3+y^3}$ কে $\frac{x^2-xy+y^2}{x^3-y^3}$ দ্বারা

(ঙ) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-9x+20}$ কে $\frac{x-5}{x-3}$ দ্বারা

সমাধান :

(ক) নির্ণেয় গুণফল $= \frac{a^2b^2}{cd} \times \frac{ab}{c^2d^2}$

$$= \frac{a^2b^2 \times ab}{cd \times c^2d^2}$$
$$= \frac{a^3b^3}{c^3d^3}$$

(খ) নির্ণেয় গুণফল $= \frac{x^2y^3}{xy^2} \times \frac{x^3b}{ay^3}$

$= \frac{x^2y^3 \times x^3b}{xy^2 \times ay^3}$

$= \frac{x^5y^3b}{xy^5a}$

$= \frac{x^4b}{y^2a}$

(গ) $\frac{10x^5b^4z^3}{3x^2b^2z} \times \frac{15y^5b^2z^2}{2y^2a^2x}$

$= \frac{10x^5b^4z^3 \times 15y^5b^2z^2}{3x^2b^2z \times 2y^2a^2x}$

$= \frac{25x^5y^5b^6}{x^3y^2z^3a^2b^2}$

$= \frac{25b^4x^2y^3z^4}{a^2}$

(ঘ) $\frac{x^2-y^2}{x^3+y^3} \times \frac{x^2-xy+y^2}{x^3-y^3}$

$= \frac{(x+y)(x-y) \times (x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)}$

$= \frac{1}{x^2+xy+y^2}$

(ঙ) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-9x+20} \times \frac{x-5}{x-3}$

$= \frac{x^2-2x-3x+6}{x^2-4x-5x+20} \times \frac{x-5}{x-3}$

$= \frac{x(x-2)-3(x-2)}{x(x-4)-5(x-4)} \times \frac{x-5}{x-3}$

$= \frac{(x-2)(x-3)}{(x-4)(x-5)} \times \frac{x-5}{x-3}$

$= \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(x-4)(x-5)(x-3)}$

$= \frac{x-2}{x-4}.$

কাজ : গুণ কর :

১। $\frac{7a^2b}{36a^3b^2}$ কে $\frac{24ab^2}{35a^4b^5}$ দ্বারা ২। $\frac{x^2+3x-4}{x^2-7x+12}$ কে $\frac{x^2-9}{x^2-16}$ দ্বারা

৫.৭ ভগ্নাংশের ভাগ

একটি ভগ্নাংশকে অপর একটি ভগ্নাংশ দ্বারা ভাগ করা মানে হলো প্রথমটিকে দ্বিতীয়টির গুণাত্মক বিপরীত ভগ্নাংশ দ্বারা গুণ করা।

উদাহরণস্বরূপ, $\frac{x}{y}$ কে $\frac{z}{y}$ দ্বারা ভাগ করতে হবে,

তাহলে $\frac{x}{y} \div \frac{z}{y}$ [এখানে $\frac{y}{z}$ হলো $\frac{z}{y}$ এর গুণাত্মক বিপরীত ভগ্নাংশ]

$= \frac{x}{y} \times \frac{y}{z}$

$= \frac{x}{z}$

উদাহরণ ৯। ভাগ কর :

(ক) $\frac{a^3b^2}{c^2d}$ কে $\frac{a^2b^3}{cd^3}$ দ্বারা

(খ) $\frac{12a^4x^3y^2}{10x^4y^3z^2}$ কে $\frac{6a^3b^2c}{5x^2y^2z^2}$ দ্বারা

(গ) $\frac{a^2-b^2}{a^2+ab+b^2}$ কে $\frac{a+b}{a^3-b^3}$ দ্বারা

(ঘ) $\frac{x^3-27}{x^2-7x+6}$ কে $\frac{x^2-9}{x^2-36}$ দ্বারা

(ঙ) $\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$ কে $\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}$ দ্বারা

সমাধান :

(ক) ১ম ভগ্নাংশ $= \frac{a^3b^2}{c^2d}$.

২য় " $= \frac{a^2b^3}{cd^3}$

২য় ভগ্নাংশের গুণাত্মক বিপরীত হলো $\frac{cd^3}{a^2b^3}$

নির্ণেয় ভাগফল $= \frac{a^3b^2}{c^2d} \div \frac{a^2b^3}{cd^3}$

$= \frac{a^3b^2}{c^2d} \times \frac{cd^3}{a^2b^3}$

$= \frac{a^3b^2cd^3}{a^2b^3c^2d} = \frac{ad^2}{bc}$

(খ) নির্ণেয় ভাগফল $= \frac{12a^4x^3y^2}{10x^4y^3z^2} \div \frac{6a^3b^2c}{5x^2y^2z^2}$

$= \frac{12a^4x^3y^2}{10x^4y^3z^2} \times \frac{5x^2y^2z^2}{6a^3b^2c}$

$= \frac{axy}{b^2c}$

(গ) নির্ণেয় ভাগফল $= \frac{a^2-b^2}{a^2+ab+b^2} \div \frac{a+b}{a^3-b^3}$

$= \frac{(a+b)(a-b)}{(a^2+ab+b^2)} \times \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a+b}$

$= (a-b)(a-b)$

$= (a-b)^2$

(ঘ) নির্ণেয় ভাগফল $= \frac{x^3-27}{x^2-7x+6} \div \frac{x^2-9}{x^2-36}$

$= \frac{x^3-3^3}{x^2-6x-x+6} \times \frac{x^2-6^2}{x^2-3^2}$

$= \frac{(x-3)(x^2+3x+3^2)}{(x-6)(x-1)} \times \frac{(x+6)(x-6)}{(x+3)(x-3)}$

$= \frac{(x^2+3x+9)(x+6)}{(x-1)(x+3)}$

(ঙ) নির্ণেয় ভাগফল $= \frac{x^3-y^3}{x^3+y^3} \div \frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}$

$= \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)} \times \frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}$

$= \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$.

কাজ : ভাগ কর :

১। $\frac{16a^2b^2}{21z^2}$ কে $\frac{28ab^4}{35xyz}$ দ্বারা ২। $\frac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2}$ কে $\frac{x^3+y^3}{x-y}$ দ্বারা

উদাহরণ ১০। সরল কর :

(ক) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\div\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

(খ) $\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}\right)\div\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$

(গ) $\frac{a^3+b^3}{(a-b)^2+3ab}\div\frac{(a+b)^2-3ab}{a^3-b^3}\times\frac{a+b}{a-b}$

(ঘ) $\frac{x^2+3x-4}{x^2-7x+12}\div\frac{x^2-16}{x^2-9}\times\frac{(x-4)^2}{(x-1)^2}$

(ঙ) $\frac{x^3+y^3+3xy(x+y)}{(x+y)^2-4xy}\div\frac{(x-y)^2+4xy}{x^3-y^3-3xy(x-y)}$

সমাধান : (ক) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\div\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

$$=\frac{(x+1)}{x}\div\frac{x^2-1}{x^2}$$

$$=\frac{(x+1)}{x}\times\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x}{x-1}.$$

(খ) $\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}\right)\div\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$

$$=\frac{x^2-xy+xy+y^2}{(x+y)(x-y)}\div\frac{x^2+xy-xy+y^2}{(x-y)(x+y)}$$

$$=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\div\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\times\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$=1$$

(গ) $\dfrac{a^3+b^3}{(a-b)^2+3ab} \div \dfrac{(a+b)^2-3ab}{a^3-b^3} \times \dfrac{a+b}{a-b}$

$= \dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2-2ab+b^2+3ab} \div \dfrac{a^2+2ab+b^2-3ab}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \times \dfrac{a+b}{a-b}$

$= \dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a^2+ab+b^2)} \times \dfrac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a^2-ab+b^2)} \times \dfrac{a+b}{a-b}$

$= (a+b)(a+b)$

$= (a+b)^2$

(ঘ) $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-7x+12} \div \dfrac{x^2-16}{x^2-9} \times \dfrac{(x-4)^2}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{x^2+4x-x-4}{x^2-3x-4x+12} \times \dfrac{x^2-3^2}{x^2-4^2} \times \dfrac{(x-4)^2}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{(x+4)(x-1)}{(x-3)(x-4)} \times \dfrac{(x+3)(x-3)}{(x+4)(x-4)} \times \dfrac{(x-4)^2}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{x+3}{x-1}$

(ঙ) $\dfrac{x^3+y^3+3xy(x+y)}{(x+y)^2-4xy} \div \dfrac{(x-y)^2+4xy}{x^3-y^3-3xy(x-y)}$

$= \dfrac{(x+y)^3}{(x-y)^2} \div \dfrac{(x+y)^2}{(x-y)^3}$

$= \dfrac{(x+y)^3}{(x-y)^2} \times \dfrac{(x-y)^3}{(x+y)^2}$

$= (x+y)(x-y)$

$= x^2-y^2$

অনুশীলনী ৫.২

১। $\dfrac{a}{x}, \dfrac{b}{y}, \dfrac{c}{z}, \dfrac{p}{q}$ কে সাধারণ হরবিশিষ্ট করলে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. $\dfrac{ayzq}{xyzq}, \dfrac{bxzq}{xyzq}, \dfrac{cxyq}{xyzq}, \dfrac{pxyz}{xyzq}$ খ. $\dfrac{axy}{xyzq}, \dfrac{byz}{xyzq}, \dfrac{czx}{xyzq}, \dfrac{pxy}{xyzq}$

গ. $\frac{a}{xyzq}, \frac{b}{xyzq}, \frac{c}{xyzq}, \frac{p}{xyzq}$ ঘ. $\frac{axyzq}{xyzq}, \frac{bxyzq}{xyzq}, \frac{cxyzq}{xyzq}, \frac{pxyzq}{xyzq}$

২। $\frac{x^2y^2}{ab}$ ও $\frac{c^3d^2}{x^5y^3}$ এর গুণফল কত হবে ?

ক. $\frac{x^2y^2c^3d^2}{abx^3y^2}$ খ. $\frac{c^3d^2}{abx^3y}$ গ. $\frac{x^2y^2c^3}{x^3y}$ ঘ. $\frac{xyd^2}{ab}$

৩। $\frac{x^2-2x+1}{a^2-2a+1}$ কে $\frac{x-1}{a-1}$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল কত হবে ?

ক. $\frac{x+1}{a-1}$ খ. $\frac{x-1}{a-1}$ গ. $\frac{x-1}{a+1}$ ঘ. $\frac{a-1}{x-1}$

৪। $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} \div \frac{(a+b)^2-4ab}{a^3+b^3} \times \frac{a+b}{a^2-ab+b^2}$ এর সরলকৃত মান কত হবে ?

ক. $\frac{a-b}{a+b}$ খ. $\frac{a+b}{a-b}$ গ. $(a-b)$ ঘ. $(a+b)$

৫। নিচের বাম দিকের তথ্যের সাথে ডানদিকের তথ্যের মিল কর :

(ক)	সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশের হর	(ক)	$x-y$
(খ)	$\frac{(x+y)^2}{x^2-y^2} \times \frac{(x-y)^2}{(x+y)}$	(খ)	$(x+y)^2$
(গ)	$\frac{x^2-y^2}{x+y} \div \frac{x-y}{(x+y)} \times \frac{1}{x+y}$	(গ)	হরগুলোর ল.সা.গু.
(ঘ)	$\frac{(x+y)^2}{x-y} \div \frac{x-y}{x+y} \times \frac{(x-y)^3}{x^2-y^2}$	(ঘ)	$(x+y)^2$

৬। গুণ কর :

(ক) $\frac{9x^2y^2}{7y^2z^2}, \frac{5b^2c^2}{3z^2x^2}$ এবং $\frac{7c^2a^2}{x^2y^2}$

(খ) $\frac{16a^2b^2}{21z^2}, \frac{28z^4}{9x^3y^4}$ এবং $\frac{3y^7z}{10x}$

(গ) $\frac{yz}{x^2}, \frac{zx}{y^2}$ এবং $\frac{xy}{z^2}$

(ঘ) $\frac{x-1}{x+1}, \frac{(x-1)^2}{x^2+x}$ এবং $\frac{x^2}{x^2-4x+5}$

(ঙ) $\frac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2}, \frac{x-y}{x^3+y^3}$ এবং $\frac{x+y}{x^3+y^3}$

(চ) $\frac{1-b^2}{1+x}, \frac{1-x^2}{b+b^2}$ এবং $\left(1+\frac{1-x}{x}\right)$

(ছ) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}, \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}$ এবং $\frac{x^2-16}{x^2-9}$

(জ) $\frac{x^3+y^3}{a^2b+ab^2+b^3}, \frac{a^3-b^3}{x^2-xy+y^2}$ এবং $\frac{ab}{x+y}$

(ঝ) $\frac{x^3+y^3+3xy(x+y)}{(a+b)^3}, \frac{a^3+b^3+3ab(a+b)}{x^2-y^2}$ এবং $\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}$

৭। ভাগ কর : (১ম রাশিকে ২য় রাশি দ্বারা)

(ক) $\frac{3x^2}{2a}, \frac{4y^2}{15zx}$ (খ) $\frac{9a^2b^2}{4c^2}, \frac{16a^3b}{3c^3}$ (গ) $\frac{21a^4b^4c^4}{4x^3y^3z^3}, \frac{7a^2b^2c^2}{12xyz}$

(ঘ) $\frac{x}{y}, \frac{x+y}{y}$ (ঙ) $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}, \frac{a^2-b^2}{a+b}$ (চ) $\frac{x^3-y^3}{x+y}, \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$

(ছ) $\frac{a^3+b^3}{a-b}, \frac{a^2-ab+b^2}{a^2-b^2}$

(জ) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-4}, \frac{x^2-16}{x^2-3x+2}$

(ঝ) $\frac{x^2-x-30}{x^2-36}, \frac{x^2+13x+40}{x^2+x-56}$

৮। সরল কর :

(ক) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\times\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)$

(খ) $\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$

(গ) $\left(1-\frac{c}{a+b}\right)\left(\frac{a}{a+b+c}-\frac{a}{a+b-c}\right)$

(ঘ) $\left(\frac{1}{1+a}+\frac{a}{1-a}\right)\left(\frac{1}{1+a^2}-\frac{1}{1+a+a^2}\right)$

(ঙ) $\left(\frac{x}{2x-y}+\frac{x}{2x+y}\right)\left(4+\frac{3y^2}{x^2-y^2}\right)$

(চ) $\left(\frac{2x+y}{x+y}-1\right)\div\left(1-\frac{y}{x+y}\right)$

(ছ) $\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)\div\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)$

(জ) $\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}-1\right)\div\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}-3ab\right)$

(ঝ) $\frac{(x+y)^2-4xy}{(a+b)^2-4ab}\div\frac{x^3-y^3-3xy(x-y)}{a^3-b^3-3ab(a-b)}$

(ঞ) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)\div\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}+1\right)$

৯ । সরল কর ।

(ক) $\frac{x^2+2x-15}{x^2+x-12}\div\frac{x^2-25}{x^2-x-20}\times\frac{x-2}{x^2-5x+6}$

(খ) $\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x}{x+y}\right)\div\left(\frac{y}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)+\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)$

(গ) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}\div\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$

(ঘ) $\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2-2ab}\times\frac{(a+b)^2-4ab}{a^3-b^3}\div\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$